

1. Саша сделала из листа клетчатой бумаги календарь на январь 2006 года (см. рисунок) и заметила, что центры клеток 10, 20 и 30 января образуют равнобедренный прямоугольный треугольник. Саша предположила, что это будет верно и в любом другом году, за исключением тех лет, когда центры клеток 10, 20 и 30 лежат на одной прямой. Права ли Саша?

							1
2	3	4	5	6	7	8	
9	10	11	12	13	14	15	
16	17	18	19	20	21	22	
23	24	25	26	27	28	29	
30	31						

2. Игорь закрасил в квадрате 6×6 несколько клеток. После этого оказалось, что во всех квадратах 2×2 одинаковое число закрасенных клеток и во всех полосках 1×3 одинаковое число закрасенных клеток. Докажите, что старательный Игорь закрасил все клетки.
3. Дан прямоугольник 100×101 , разбитый линиями сетки на единичные квадратики. Найдите число отрезков, на которое линии сетки разбивают диагональ.
4. В узлах клетчатой плоскости отмечено 5 точек. Доказать, что есть две из них, середина отрезка между которыми тоже попадает в узел.
5. На клетчатой бумаге проведена диагональ прямоугольника 1×4 . Покажите, как, пользуясь только линейкой без делений, разделить этот отрезок на три равные части.
6. На клетчатой бумаге отмечены четыре узла сетки, образующие квадрат 4×4 . Отметьте ещё два узла и соедините их замкнутой ломаной так, чтобы получился шестиугольник (не обязательно выпуклый) площади 6 клеток.
7. а) Сколькими способами можно разбить прямоугольник 8×2 на прямоугольники 1×2 ?
 б) Придумайте и опишите фигуру, которую можно разрезать на прямоугольники 1×2 ровно 555 способами.

1. Саша сделала из листа клетчатой бумаги календарь на январь 2006 года (см. рисунок) и заметила, что центры клеток 10, 20 и 30 января образуют равнобедренный прямоугольный треугольник. Саша предположила, что это будет верно и в любом другом году, за исключением тех лет, когда центры клеток 10, 20 и 30 лежат на одной прямой. Права ли Саша?

							1
2	3	4	5	6	7	8	
9	10	11	12	13	14	15	
16	17	18	19	20	21	22	
23	24	25	26	27	28	29	
30	31						

2. Игорь закрасил в квадрате 6×6 несколько клеток. После этого оказалось, что во всех квадратах 2×2 одинаковое число закрасенных клеток и во всех полосках 1×3 одинаковое число закрасенных клеток. Докажите, что старательный Игорь закрасил все клетки.
3. Дан прямоугольник 100×101 , разбитый линиями сетки на единичные квадратики. Найдите число отрезков, на которое линии сетки разбивают диагональ.
4. В узлах клетчатой плоскости отмечено 5 точек. Доказать, что есть две из них, середина отрезка между которыми тоже попадает в узел.
5. На клетчатой бумаге проведена диагональ прямоугольника 1×4 . Покажите, как, пользуясь только линейкой без делений, разделить этот отрезок на три равные части.
6. На клетчатой бумаге отмечены четыре узла сетки, образующие квадрат 4×4 . Отметьте ещё два узла и соедините их замкнутой ломаной так, чтобы получился шестиугольник (не обязательно выпуклый) площади 6 клеток.
7. а) Сколькими способами можно разбить прямоугольник 8×2 на прямоугольники 1×2 ?
 б) Придумайте и опишите фигуру, которую можно разрезать на прямоугольники 1×2 ровно 555 способами.

Решения:

1. Всего существует 7 различных вариантов расположения дат в январском календаре. можно их перебрать и все.
2. ...
3. диагональ пересечёт все вертикальные линии 100шт. и все горизонтальные 101шт. и остаётся посчитать сколько узлов сетки лежит на дигонали (их 0шт, т.к 100 и 101 взаимопросты)
4. Введем систему координат на плоскости, так чтобы оси шли по линиям клеток, а начало координат было в любом узле. Тогда координаты любого узла имеют вид (a,b) , где a и b -целые числа. Заметим, что середина отрезка с концами в точках (a,b) и (c,d) имеет вид $((a+c):2;(b+d):2)$. Четные числа обозначим буквой Ч, а нечетные числа - Н, тогда для обозначения узла у нас есть четыре возможности (Ч,Ч), (Ч,Н), (Н,Ч), (Н,Н). Так как точек 5, то есть, по крайней мере, два узла имеют одинаковый вид (принцип Дирихле) - они то и будут искомыми.
5. необходимо воспользоваться теоремой Фаллеса. т.е нужно разделить диагональ параллельными секущими.
6. необходимо проверять пример вручную.
7. ...